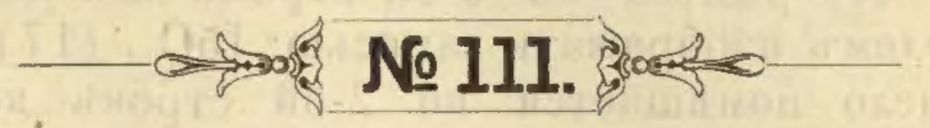
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 111.

X Сем. **5 Февраля 1891 г.** **№ 3.**

ТАБЛИЦА ПЯТИЗНАЧНЫХЪ ЛОГАРИѲМОВЪ ВРОНСКАГО.

Въ 1827 году, подъ заглавіемъ „Canons de Logarithmes", появились въ Парижѣ оригинальныя таблицы, имѣющія назначеніемъ вмѣщать на пространствѣ одной страницы небольшаго листа бумаги обширную систему логариѳмовъ, занимающую обыкновенно цѣлую книгу. Авторъ этихъ таблицъ, извѣстный философъ-математикъ Гоэне-Вронскій, составилъ таблицъ этого рода шесть: его таблица № 1 содержитъ 4-значные логариѳмы, таблицы № 1 bis, № 2, № 3—каждая 5-тизначные логариѳмы, таблица № 3 bis—6-ти значные логариѳмы и таблица № 4—семизначные логариѳмы. Русское изданіе этихъ таблицъ вышло въ Петербургѣ въ 1845 году. Оба изданія, французское и русское, составляютъ чрезвычайную библіографическую рѣдкость. Прошлое лѣто вышло въ Варшавѣ польское изданіе таблицъ Вронскаго, и въ настоящее время составителемъ этой статьи печатается новое изданіе этихъ таблицъ, въ которомъ будутъ помѣщены всѣ шесть таблицъ вмѣстѣ съ изложеніемъ теоріи, на основаніи которой онѣ построены.

Желая познакомить читателей Вѣстника съ таблицами Вронскаго, прилагаемъ таблицу № 3, содержащую пятизначные логариѳмы, и способъ употребленія этой таблицы.

Описаніе таблицы. Числа, составляющія таблицу, размѣщены *колоннами* и вертикальными *столбцами.* Горизонтальныя колонны, считая сверху внизъ обозначены (съ правой стороны таблицы) буквами A, B, C, D. Колонна A подраздѣлена на двѣ колонны: A_1, A_2; колонна C—на четыре колонны: C_1, C_2, C_3, C_4; колонна D—на три колонны: D_1, D_2, D_3. Вертикальные столбцы, считая отъ лѣвой руки къ правой, обозначены (снизу таблицы) римскими цыфрами: I, II, III, IV и арабскими цыфрами: (0), (1), (2),.......(20). Колонны A_1. A_2, B заключаютъ по четыре строки, колонны C_1, C_2, C_3, C_4—по пяти строкъ и колонны D_1, D_2, D_3—по три строки—каждая. Въ колоннахъ A_1, A_2, B: первой строкѣ колонны B соотвѣтствуютъ первая строка колонны A_1, и первая строка колонны A_2; второй строкѣ колонны B—вторая строка колонны A_1 и вторая строка колонны A_2 и т. д. Каждой строкѣ горизонтальной колонны B соотвѣтствуетъ одинъ изъ вертикальныхъ столбцовъ, обозначенныхъ римскими цыфрами, а именно: первой строкѣ колонны B—вертикальный

столбецъ I, второй строкѣ колонны B — вертикальный столбецъ II и т. д. Это послѣднее соотвѣтствіе выражено тѣмъ, что въ заголовкѣ каждаго изъ вертикальныхъ столбцовъ I, II, III, IV обозначены предѣлы, между которыми заключаются числа соотвѣтствующей строки колонны B. Каждое изъ табличныхъ чиселъ легко найти, если указать, въ которой строкѣ какой колонны и въ какомъ столбцѣ таблицы оно заключается. Если напр. число содержится въ 5-ой строкѣ колонны C_3 и въ (17) столбцѣ, то это будемъ изображать записью: [5C_3, (17)]; запись [2D_3, I] означаетъ, что число помѣщается во 2-ой строкѣ колонны D_3 и въ столбцѣ I и т. п.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи число будемъ обозначать буквою N, мантиссу логариѳма числа N — знакомъ (log N). Въ таблицѣ помѣщены элементы N и соотвѣтствующіе элементы (log N). Для пользованія таблицею нужно умѣть по этой таблицѣ:

I. Составить N изъ его табличныхъ элементовъ и, обратно, по данному N найти его табличные элементы;

II. по данному N составить (log N);

III. по данному (log N) составить N.

I.

Число N составляется изъ трехъ частей: начальной, средней и окончательной; окончательная часть въ свою очередь можетъ состоять изъ двухъ или болѣе членовъ. Табличные элементы N содержатся въ горизонтальной колоннѣ B и въ вертикальныхъ столбцахъ I, II, III, IV. Въ одной изъ строкъ колонны B находится *начальная часть* N; въ *соотвѣтствующемъ* этой строкѣ вертикальномъ столбцѣ (изъ ряда I, II, III, IV) на протяженіи колоннъ C — *средняя часть* N; *въ томъ же* вертикальномъ столбцѣ, но на протяженіи колоннъ D — *окончательная часть* N или *члены этой части*; N есть сумма этихъ частей. Точки въ каждомъ изъ табличныхъ чиселъ колонны B и столбцовъ I, II, III, IV помѣщены за цыфрами одинаковыхъ разрядовъ; поэтому при сложеніи эти числа подписываютъ одно подъ другимъ такъ, чтобы точки приходились одна подъ другою; если же окончательная часть N состоитъ изъ двухъ или болѣе членовъ, то точка, начиная со второго члена, подвигается каждый разъ на одно мѣсто вправо. Если, напр., начальная часть N есть 34 . [2B, (14)], средняя — 0 . 65 [3C_3, II] и окончательная — . 035 [1D_3, II], то для полученія N складываютъ эти числа, подписавъ ихъ слѣдующимъ образомъ:

Нач.	ч.	34 .
Ср.	ч.	0 . 65
Ок.	ч.	. 035
	N =	34 . 685

Въ числѣ 18804 окончательная часть состоитъ изъ двухъ членовъ:

Нач. ч.		18.5	[1B, (17)]
Ср. ч.		0.300	[$2C_3$, I]
Ок.	1-й чл.	0025	[$1D_1$, I]
	2-й чл.	0150	[$3D_2$, I]
N = 18.80400			

Не всегда въ N находятся всѣ эти части; бываетъ, что обѣ части, средняя и окончательная, или одна изъ этихъ двухъ частей — равны нулю. Напр. число 72 [3B, (16)] не содержитъ ни средней, ни окончательной частей; число 904 не содержитъ окончательной части:

Нач. ч.	88. .	[4B, (2)]
Ср. ч.	2.4.	[$2C_3$, IV]
N = 90.4		

Число 5607 не содержитъ средней части:

Нач. ч.	56.	[3B, (8)]
Ок. ч.	.07	[$1D_3$, III]
N = 56.07		

Эти примѣры поясняютъ, какъ составляется N по извѣстнымъ его элементамъ. Изъ слѣдующаго будетъ видно, какъ *по данному* N *отыскать табличные элементы* N т. е. начальную, среднюю и окончательную (или ея члены) части N.

Для примѣра отыщемъ *элементы числа 8638.*

Отдѣляемъ въ этомъ числѣ двѣ цыфры слѣва точкою и получаемъ 86.38; ищемъ въ колоннѣ B число 86.; не находя его, беремъ *ближайшее меньшее*—84. [4B, (1)]; оно и есть *начальная часть* 8638. Отнимаемъ 84. отъ 86.38, получаемъ остатокъ 2.38; число 2.38, ищемъ въ IV столбцѣ (соотвѣтствующемъ 4-ой строкѣ колонны B, содержащей начальную часть) на протяженіи колоннъ C; не найдя его тамъ, беремъ опять *ближайшее меньшее*—2.2 [$1C_3$, IV]; оно и есть *средняя часть* 8638. Отнимая 2.2 отъ 3.38, получаемъ остатокъ .18; ищемъ число .18 въ томъ же IV столбцѣ, но на протяженіи колоннъ D, гдѣ и находимъ это число [$3D_3$, IV]; оно и есть *окончательная часть* 8638.

86.38
—84
2.38
— 2.2
.18
.18
0

Для числа 29379 находимъ *начальную часть* 29. [2B, (9)] и *среднюю* 0.35 [$2C_2$, II]; вычитая ихъ изъ 29379, получаемъ остатокъ .029; число .029 ищемъ во II столбцѣ на протяженіи колоннъ D; не найдя его тамъ, беремъ *ближайшее меньшее* .025 [$2D_2$, II]; оно представляетъ *1-й членъ окончательной части* 29379; вычитая .025 изъ .029, получаемъ остатокъ .004; въ этомъ остаткѣ подвигаемъ точку на одно мѣсто *вправо*, получаемъ 0.04, и ищемъ полученное число въ томъ же II столбцѣ и на протяженіи тѣхъ же колоннъ D; тамъ мы находимъ .040, въ которомъ передвигая точку на одно мѣсто *влѣво*, получаемъ .0040 — *2-й послѣдній членъ окончательной части* 29379.

29.379
— 29.
0.379
— 0.35
.029
— .025
0.04
— .040
0

Вычитанія, указанныя въ этихъ примѣрахъ, можно производить въ умѣ, и пріискиваніе табличныхъ элементовъ N можно располагать слѣдующимъ образомъ:

N = 8638		
Нач.	ч.	84.
Ср.	ч.	2.2
Ок.	ч.	.18
		8638

N = 29379		
Нач. ч.		29.
Ср. ч.		0.35
Ок. ч.	1-й чл.	.025
	2-й чл.	040
		293790

Примѣчаніе. Числа, начальныя части которыхъ содержатся между 10 и 16, (напр 1478, 1271, 13679 и т. п.), могутъ быть составлены, начиная первою, или начиная четвертою строкою колонны B.

II.

По данному N *составить* (log N). Пріискиваютъ табличные элементы N, т. е. начальную, среднюю и окончательную (или ея члены) части N, и *соотвѣтствующія имъ*: начальную, среднюю и окончательную (или ея члены) части (log N). Элементы начальныхъ частей (log N) содержатся въ горизонтальныхъ колоннахъ A_1, A_2; среднія части (log N)— въ столбцахъ: (0), (1), (2)..........(19) на протяженіи колоннъ C; окончательныя части (log N) или члены этихъ частей—въ столбцахъ (0), (1), (2),.........(20) на протяженіи колоннъ D.

Начальная часть (log N) берется изъ строкъ обѣихъ колоннъ A_1, A_2, соотвѣтствующихъ той строкѣ колонны B, въ которой находится начальная часть N—и изъ столбца, содержащаго эту часть N; указанное число колонны A_1 есть *первая цыфра*, а число колонны A_2—слѣдующія *четыре цыфры начальной части* (log N). Напр., если нач. ч. N = 64. [3B, (12)], то первая цыфра начальной части (log N) есть 8 [$3A_1$. (12)],

слѣдующія четыре цыфры: 0618 [$3A_2$, (12)] и поэтому, нач. ч. (log N)=80618.

Если средняя часть N = 0, то и средняя часть (log N) = 0. Если средняя часть N не нуль, то средняя ч. (log N) содержится въ той строкѣ колоннъ C, изъ которой взята средняя часть N—и въ томъ столбцѣ, въ которомъ содержится начальная часть N. Напр., если нач. ч. N содержится въ столбцѣ (13), а средняя во 2-ой строкѣ колонны C_3, то средняя часть (log N) = 0783 [$2C_3$, (13)].

Если окончательная часть числа N = 0, то и окончательная часть (log N) = 0; если который нибудь изъ членовъ окончательной части N = 0, то и соотвѣтствующій такому члену—членъ окончательной части (log N) тоже = 0. Если окончательная часть числа N не нуль, то при опредѣленіи окончательной части (log N) различаютъ два случая:

а) если средняя часть N = 0, т. е. если N состоитъ изъ начальной и окончательной частей, то окончательная часть (log N) содержится въ той строкѣ колоннъ D, въ которой содержится окончательная часть N, и въ томъ столбцѣ, въ которомъ содержится начальная часть N. Напр., если начальная часть N содержится въ солбцѣ (11), а его окончательная часть въ 1-ой строкѣ колонны D_3, то окончательная часть (log N) = 49 [$1D_3$, (11)];

б) если средняя часть N не нуль, т. е., если N состоитъ изъ начальной, средней и окончательной частей, то для полученія окончательной части (log N) поступаютъ слѣдующимъ образомъ: берутъ изъ таблицы два числа, оба изъ строки колоннъ D, содержащей окончательную часть N: одно число изъ столбца, содержащаго начальную часть N, и другое изъ слѣдующаго столбца направо; *разность* этихъ двухъ чиселъ, умноженную на *дополнительнаго множителя*, соотвѣтствующаго средней части N, прибавляютъ ко второму числу. Дополнительный множитель есть число столбца (20), содержащееся въ той строкѣ колоннъ C, изъ которой взята средняя часть N. Примѣръ: пусть начальная часть N содержится во (2) столбцѣ, средняя—въ 1-й строкѣ колонны C_3 и окончательная—въ 3-ей строкѣ колонны D_3. Тогда, для отысканія окончательной части (log N), разность чиселъ: 89 [$3D_3$, (2)] и 85 [$3D_3$, (3)], т. е. число 4, умножаютъ на дополнительнаго множителя, соотвѣтствующаго средней части N, т. е. на число 0,45 [$1C_3$, (20)], и найденное произведеніе [$0,45 \times 4 = 1,80$—вмѣсто этого 2] прибавляютъ къ 85 и получаютъ, что окончательная часть (log N) = 87.

Если бы окончательная часть N состояла изъ членовъ 1-го, 2-го и т. д., то, соотвѣтственно этому, окончательная часть (log N) состояла бы изъ членовъ 1-го, 2-го и т. д. Члены окончательной части (log N) разыскиваются по правиламъ а) и б), но при сложеніи подписываются, начиная со второго члена, каждый разъ подвигая на одну цыфру вправо.

Примѣры: 1) Найти (log 538):

	N = 538	(log N) = ?
Нач. ч.	52 .	71600 [$3A_1$ и $3A_2$, (6)]
Ср. ч.	1 . 8	1478 [$3C_4$, (6)]
	53 . 8	73078 = (log 538)

2) Найти (log 26025):

	N = 26025		(log N) = ?
Нач. ч.	26.		41497 [$2A_1$ и $2A_2$, (6)]
Ок. ч.	.025		42 [$2D_2$, (6)]
	26.025		41539 = (log 26025)

3) Найти (log 9956):

N = 9956			(log N) = ?
Нач. ч.	96.		98227 [$4A_1$ и $4A_2$, (4)]
Ср. ч.	3.4	Доп. мн. 0,15 [$2C_4$, (20)];	1512 [$2C_4$, (4)]
Ок. ч.	.16	Разн. 3 [$2D_3$, (4)]— —[$2D_3$, (5)]	69 [$2D_3$, (5)] 0 45
	99.56	0,15 × 3 = 0,45	99808 = (log 9956)

4) Найти (log 42083):

	N = 42083		(log N) = ?
Нач. ч.	42.		62325 [$3A_1$ и $3A_2$, (1)]
Ок. ч. 1-й чл.	.08		83 [$2D_3$, (1)]
Ок. ч. 2-й чл.	03		31 [$3D_1$, (1)]
	42.083		62411 = (log 42083)

5) Найти (log 49005):

	N = 49005		(log N) = ?
Нач. ч.	48		68124 [$3A_1$ и $3A_2$, (4)]
Ср. ч.	1.0	Д. мн. 0.50 [$5C_2$, (20)]	0895 [$5C_2$, (4)]
Ок. ч. 1-й чл.	.00		00
Ок. ч. 2-й чл.	05	Разн. 2 [$2D_2$, (4)]— —[$2D_2$, (5)]	43 [$2D_2$, (5)] 1
	49.005	0,50 × 2 = 1.	69023 = (log 49005)

III.

По данному (log N) *отыскать* N. Отыскиваютъ по таблицѣ начальную, среднюю и окончательную части (log N) и соотвѣтствующія имъ начальную, среднюю и окончательную части N.

Примѣры:

1) Найти N, если (log N) = 04922.

Въ колоннахъ A_1 и A_2 находимъ 04922 [4A_1 и 4A_2, (8)] и слѣд. N = 112 [4B, (8)].

2) Найти N, если (log N) = 73078:

Ищемъ въ колоннахъ A_1 и A_2 число 73078; не находя его беремъ *ближайшее меньшее* 71600 [3A_1 и 3A_2, (6)]; это начальная часть (log N); соотвѣтствующая начальная часть N = 52. [3B, (6)]. Отнимая 71600 отъ 73078, получаемъ остатокъ 1478; ищемъ это число въ столбцѣ (6) на протяженіи колоннъ C; найдя его тамъ [3C_4, (6)], заключаемъ, что оно есть средняя часть (log N) и слѣд. средняя часть N = 1 . 8 [3C_4, III]. Окончательной части въ (log N) нѣтъ, слѣд. нѣтъ такой части и въ числѣ N. Поэтому N = 52 . + 1 . 8 = 53 . 8.

3) Найти N, если (log N) = 76380.

Въ таблицѣ находимъ начальную часть (log N), т. е. число 76343 [3A_1 и 2A_2, (9)] и соотвѣтствующую часть N, т. е. число 58. [3B, (9)]. Вычитая 76343 изъ 76380, получаемъ остатокъ 0037; этотъ остатокъ ищемъ въ (9) столбцѣ на протяженіи колоннъ C; такъ какъ самое малое изъ чиселъ столбца (9) на протяженіи колоннъ C превышаетъ число 0037, то отсюда заключаемъ, что средняя часть (log N), а слѣдовательно и средняя часть N, равны нулю. Поэтому число 0037 слѣдуетъ искать въ столбцѣ (9) на протяженіи колоннъ D; найдя тамъ это число [2D_2, (9)], заключаемъ, что оно есть окончательная часть (log N) и что соотвѣтствующая окончательная часть N есть. 05[2D_2, III]. По этому N = 58 . + . 05 = 5805.

4) Найти N, если (log N) = 93642.

Начальная часть (log N) = 92428 [4A_1 и 4A_2, (1)] и слѣд. начальная часть N = 84 . [4B, (1)]. Отнимая 92428 отъ 93642, получаемъ остатокъ 1214; въ столбцѣ (1) на протяженіи колоннъ C, къ этому остатку пріискиваемъ *ближайшее меньшее* число 1123 [1C_3, (1)], которое и есть средняя часть (log N); соотвѣтствующая ей средняя часть N — есть число 2 . 2 [1C_3, IV], а дополнительный множитель, соотвѣтствующій этой части N — 0,45 [1C_3, (20)]. Вычитая 1123 изъ 1214, получаемъ остатокъ 91; въ столбцахъ (1) и (2) на протяженіи колоннъ D замѣчаемъ, что 91 заключается между числами 93 и 89; разность ихъ 4 умножаемъ на 0,45, получаемъ 1.80; это число прибавляемъ къ 89, получаемъ 90 . 80 или 91; отсюда заключаемъ, что 91 есть окончательная часть (log N), а соотвѣтствующая часть N поэтому = . 18 [3D_3, IV]. Слѣд.

N = 84 . + 2 . 2 + . 18 = 8638.

Послѣ сдѣланныхъ указаній, пользованіе таблицею не представитъ никакого затрудненія. Слѣдуетъ замѣтить, что логариѳмы чиселъ, будучи найдены по этой таблицѣ, иногда отличаются отъ логариѳмовъ, найденныхъ посредствомъ обыкновенныхъ таблицъ, въ послѣднемъ десятичномъ знакѣ на одну единицу. Эта разница происходитъ отъ того, что каждый изъ табличныхъ элементовъ логариѳма есть число, приближенное съ точностью до $^1/_2$ единицы послѣдняго десятичнаго знака, вслѣдствіе этого при суммированіи трехъ элементовъ погрѣшность можетъ быть болѣе одной единицы послѣдняго десятичнаго знака, не доходя до $1^1/_2$ этихъ

единицъ. Въ приложенной таблицѣ тѣ элементы логариѳмовъ, въ которыхъ послѣднiй десятичный знакъ при округленiи увеличенъ на одну единицу, отмѣчены черточкою, помѣщенною надъ этимъ знакомъ; указанiе это не содержится въ оригинальныхъ таблицахъ Вронскаго.

Л. Монкевичъ (Спб.)

ФОКУСЫ ПЯТИСТОРОННИКА.

Отвѣтъ на тему, предложенную въ № 53 „Вѣстника“.

1. *Пятисторонникомъ* называется совокупность пяти прямыхъ, расположенныхъ какъ нибудь на плоскости.

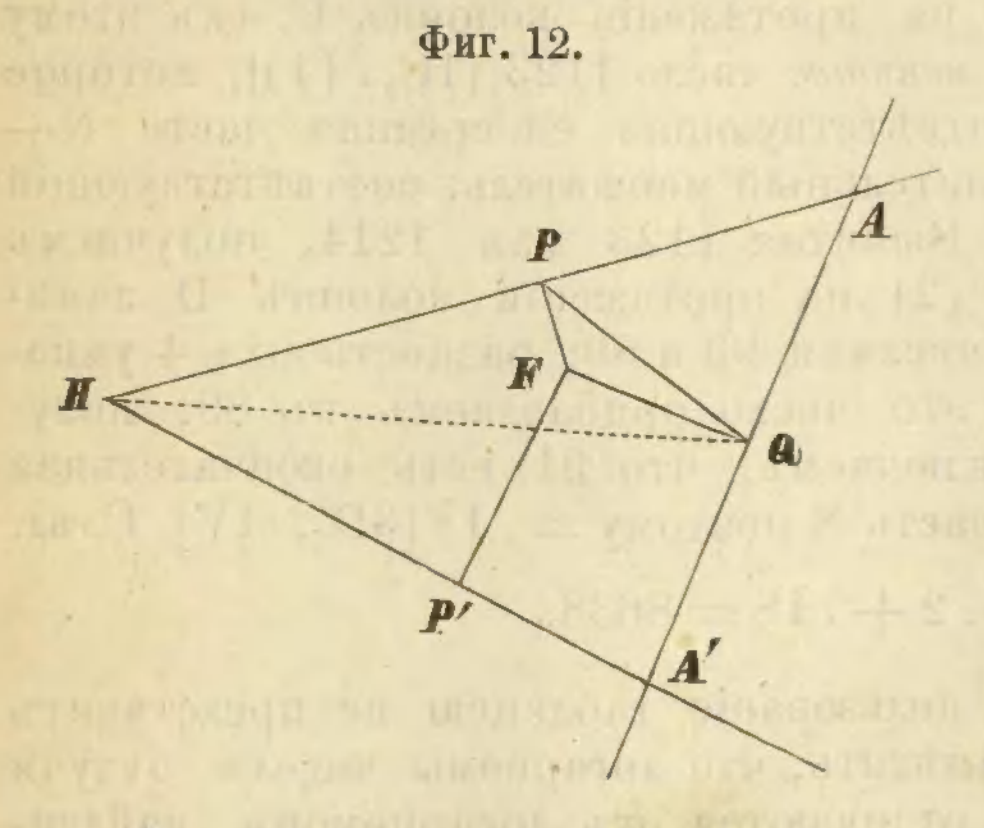
2. *Фокусомъ* многоугольника назовемъ точку, опредѣленную такимъ образомъ, чтобы основанiя перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ нее на стороны, находились на одной окружности.

3. Далѣе мы покажемъ, что пятисторонникъ всегда имѣетъ фокусъ, одинъ или два. Многосторонникъ, имѣющiй болѣе пяти сторонъ, не всегда имѣетъ фокусъ. Мы однако легко можемъ образовать многоугольникъ съ произвольнымъ числомъ сторонъ такъ, чтобы онъ имѣлъ фокусъ. Для этой цѣли возьмемъ кругъ и точку F; соединимъ эту точку съ нѣсколькими точками окружности и въ этихъ точкахъ возставимъ перпендикуляры; собранiе этимъ перпендикуляровъ и образуетъ многосторонникъ, имѣющiй фокусъ въ точкѣ F.

Прежде чѣмъ перейти къ построенiю фокуса пятисторонника, покажемъ нѣкоторыя свойства фокусовъ.

4. *Теорема.* Если многосторонникъ имѣетъ фокусъ, то отрѣзки всѣхъ сторонъ, заключенные между двумя опредѣленными сторонами, стягиваютъ равные углы въ фокусѣ.

Фиг. 12.



Пусть (фиг. 12). F есть фокусъ, HA и HA′ двѣ опредѣленные стороны многосторонника и AA′ какая нибудь изъ остальныхъ сторонъ. Опустимъ на стороны перпендикуляры FP, FP′ и FQ. По условiю точка Q находится на постоянной окружности, проходящей черезъ точки P и P′; слѣдовательно уголъ PQP′ сохраняетъ постоянную величину. Соединимъ F съ A и A′*). Нужно доказать, что уголъ AFA′ также сохраняетъ постоянную величину.

Въ четыреугольникѣ FPAQ два противоположные угла при P и Q прямые; около такого четыреугольника можно описать окружность, центръ которой находится на срединѣ FA. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\angle AFQ = \angle APQ,$$

какъ вписанные въ одинъ и тотъ же сегментъ.

*) По ошибкѣ, эти прямыя на чертежѣ не проведены.

Соединимъ H съ Q. Такъ какъ уголъ APQ есть внѣшній уголъ треугольника HPQ, то

$$\angle APQ = \angle PHQ + \angle PQH.$$

Сравнивая это равенство съ предыдущимъ, находимъ

$$\angle AFQ = \angle PHQ + \angle PQH.$$

Въ четыреугольникѣ FQA'P' два противоположные угла при Q и P' прямые. Отсюда, подобно предыдущему, находимъ:

$$\angle A'FQ = \angle P'HQ + \angle P'QH.$$

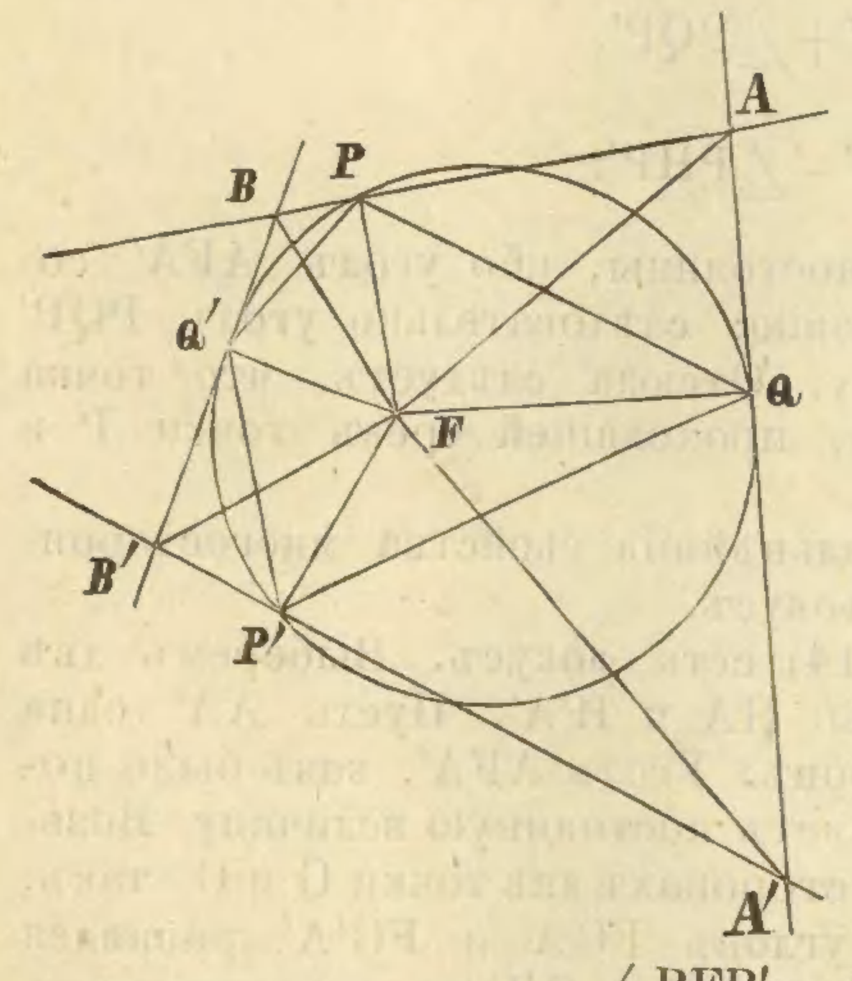
Складывая почленно послѣднія два равенства, находимъ:

$$\angle AFA' = \angle PHP' + \angle PQP'.$$

Углы, стоящіе во второй части, сохраняютъ постоянную величину, слѣдовательно уголъ AFA' также сохраняетъ постоянную величину, что и требовалось доказать.

5. *Примѣчаніе.* Доказанная теорема вѣрна лишь въ томъ случаѣ, когда стороны находятся по одной сторонѣ фокуса. Если же стороны расположены съ разныхъ сторонъ фокуса, то ихъ отрѣзки, заключенные между двумя постоянными сторонами, стягиваютъ въ фокусѣ такіе углы, сумма которыхъ равна двумъ прямымъ угламъ.

Фиг. 13.



Положимъ, что фокусъ заключается внутри четыреугольника (фиг. 13), образуемаго двумя постоянными сторонами AB и A'B' и двумя отрѣзками AA' и BB' двухъ какихъ либо другихъ сторонъ. Опустимъ изъ фокуса перпендикуляры на стороны, соединимъ фокусъ съ вершинами четыреугольника ABB'A'. По условію, основанія перпендикуляровъ находятся на одной окружности PQP'Q'. Нужно доказать, что углы AFA' и BFB' дополняютъ другъ друга до двухъ прямыхъ угловъ.

Подобно прежнему (n° 4), имѣемъ:

$$\angle AFA' = \angle APQ + \angle A'P'Q.$$

Точно также

$$\angle BFB' = \angle BPQ' + \angle B'P'Q'.$$

Отсюда

$$\angle AFA' + \angle BFB' = \angle APQ + \angle BPQ' + \angle A'P'Q + \angle B'P'Q'. \quad (1)$$

Означимъ чрезъ d прямой уголъ. Сумма трехъ угловъ при каждой изъ двухъ точекъ P и P' равна $2d$,

$$\angle APQ + \angle BPQ' + \angle QPQ' = 2d,$$
$$\angle A'P'Q + \angle B'P'Q' + \angle QP'Q' = 2d.$$

Сумма двухъ противоположныхъ угловъ четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, равна двумъ прямымъ угламъ:

$$\angle QPQ' + \angle QP'Q' = 2d.$$

Вычитая это равенство изъ суммы предыдущихъ двухъ, находимъ:

$$\angle APQ + \angle BPQ' + \angle A'P'Q + \angle B'P'Q' = 2d.$$

Изъ сравненія этого равенства съ (1) находимъ:

$$\angle AFA' + \angle BFB' = 2d,$$

что и требовалось доказать.

6. *Обратная теорема.* Если отрѣзки всѣхъ остальныхъ сторонъ, заключенныхъ между двумя опредѣленными сторонами, стягиваютъ равные углы въ нѣкоторой точкѣ, то эта точка будетъ фокусомъ многосторонника, т. е. основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ этой точки на стороны, будутъ находиться на одной окружности.

Пусть (фиг. 12) HA и HA′ двѣ опредѣленныя стороны. Положимъ, что отрѣзки всѣхъ другихъ сторонъ, заключенные между HA и HA′ стягиваютъ въ точкѣ F равные углы. Пусть AA′ одна изъ остальныхъ сторонъ. Опустимъ изъ точки F перпендикуляры на стороны; соединимъ F съ A и A′. Мы уже нашли (n° 4), что

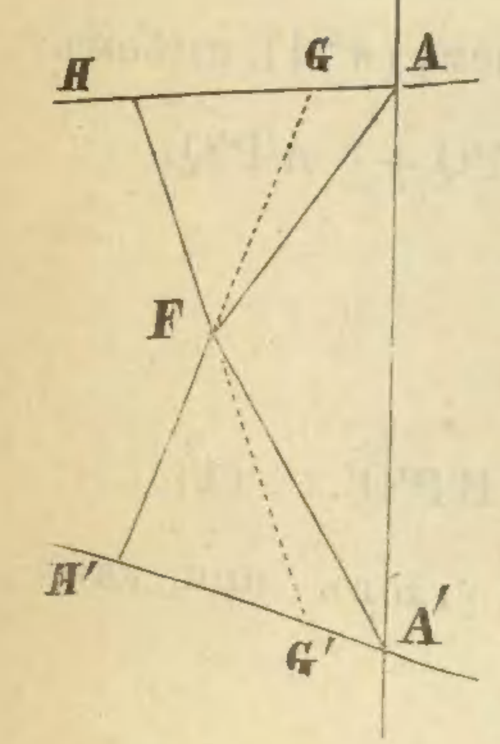
$$\angle AFA' = \angle PHP' + \angle PQP',$$

откуда

$$\angle PQP' = \angle AFA' - \angle PHP'.$$

Углы, стоящіе во второй части, постоянны, ибо уголъ AFA′ сохраняетъ постоянную величину по условію; слѣдовательно уголъ PQP′ также сохраняетъ постоянную величину. Отсюда слѣдуетъ, что точка Q находится на постоянной окружности, проходящей чрезъ точки P и P′, что и требовалось доказать.

Фиг. 14.



7. Покажемъ дальнѣйшія свойства многосторонниковъ, имѣющихъ фокусъ.

Пусть F (фиг. 14) есть фокусъ. Выберемъ двѣ какія нибудь стороны HA и H′A′. Пусть AA′ одна изъ остальныхъ сторонъ. Уголъ AFA′, какъ было показано (n° 4), сохраняетъ постоянную величину. Возьмемъ на выбранныхъ сторонахъ двѣ точки G и G′ такъ, чтобы каждый изъ угловъ FGA и FG′A′ равнялся углу AFA′. Продолжимъ GF и G′F до пересѣченія съ выбранными сторонами въ точкахъ H′ и H. Покажемъ, что треугольники AHF и A′H′F равноугольны.

По построенію

$$\angle AFA' = \angle FGA.$$

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ по углу GFA, найдемъ

$$\angle GFA' = \angle GFA + FGA.$$

Но уголъ въ первой части дополняется до двухъ прямыхъ смежнымъ ему угломъ A'FH'; сумма угловъ во второй части дополняется до двухъ прямыхъ третьимъ угломъ HAF треугольника FGA; эти дополнительные углы будутъ также равны:

$$\angle A'FH' = \angle HAF.$$

Подобнымъ образомъ докажемъ, что

$$\angle AFH = \angle H'A'F.$$

Итакъ треугольники AHF и A'H'F равноугольны, слѣдовательно подобны. Изъ ихъ подобія находимъ:

$$HA : HF = H'F : H'A',$$

откуда

$$HA \,.\, H'A' = HF \,.\, H'F.$$

Отсюда мы видимъ, что каждая изъ остальныхъ сторонъ отсѣкаетъ на двухъ выбранныхъ сторонахъ отрѣзки HA и H'A', произведеніе которыхъ есть величина постоянная.

8. Два ряда точекъ, расположенныхъ на двухъ прямыхъ линіяхъ такимъ образомъ, что произведеніе соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, отсчитываемыхъ отъ двухъ постоянныхъ точекъ, сохраняетъ постоянную величину, называются *гомологическими рядами.*

Постоянныя точки, отъ которыхъ отсчитываются соотвѣтственные отрѣзки, назовемъ *главными точками двухъ гомологическихъ рядовъ.*

9. Изъ предыдущаго мы заключаемъ (n° 7):

Если многосторонникъ имѣетъ фокусъ, то двѣ его стороны пересѣкаются остальными сторонами по двумъ гомологическимъ рядамъ.

Прямыя, соединяющія главныя точки H и H' (фиг. 14) съ фокусомъ, одинаково наклонены къ сторонамъ,

$$\angle AHF = \angle A'H'F.$$

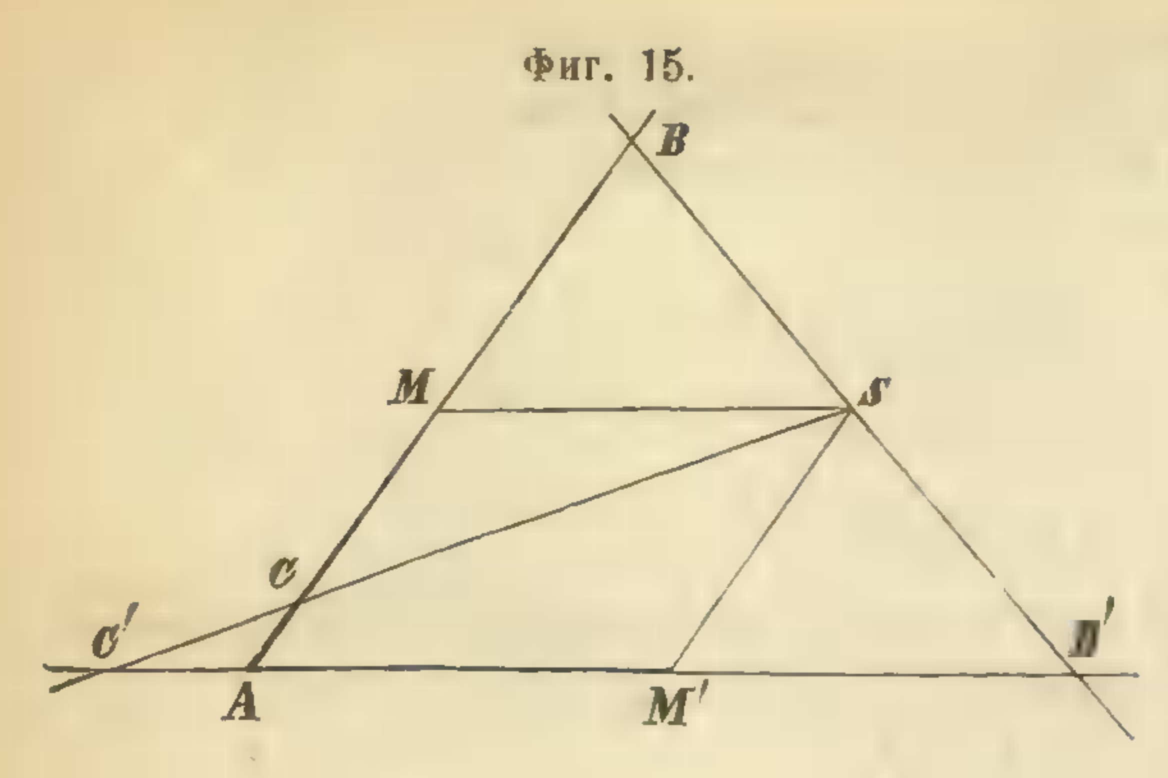
Произведеніе соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, отсчитываемыхъ отъ главныхъ точекъ, равно произведенію прямыхъ, соединяющихъ главныя точки съ фокусомъ,

$$HA.H'A' = HF.H'F.$$

10. Покажемъ теперь, какъ построить главныя точки двухъ гомологическихъ рядовъ. Но прежде докажемъ одну теорему.

Теорема. Произвольная прямая, проходящая чрезъ вершину параллелограмма, отсѣкаетъ отъ неопредѣленно продолженныхъ сторонъ параллелограмма отрѣзки, произведеніе которыхъ сохраняетъ постоянную величину, равную произведенію двухъ смежныхъ сторонъ параллелограмма, при чемъ отрѣзки отсчитываются отъ двухъ противоположныхъ вершинъ параллелограмма.

Возьмемъ параллелограммъ (фиг. 15) AMSM'. Пусть сѣкущая, проходящая чрезъ вершину S, пересѣкаетъ продолженія сторонъ въ B и



Фиг. 15.

B'. Изъ подобія треугольниковъ BMS и SM'B' имѣемъ:

$$MB : MS = M'S : M'B',$$

откуда

$$MB.M'B' = MS.M'S.$$

Разсмотримъ еще такой случай, когда сѣкущая пересѣкаетъ одну сторону въ C и продолженіе другой въ C'. Изъ подобія треугольниковъ CMS и SM'C' имѣемъ:

$$MC : MS = M'S : M'C',$$

откуда

$$MC . M'C' = MS.M'S.$$

Отсюда слѣдуетъ, что наша теорема имѣетъ мѣсто при всякомъ положеніи сѣкущей.

11. *Слѣдствіе.* Пучокъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ одну точку, пересѣкается двумя произвольными прямыми по двумъ гомологическимъ рядамъ. Главными точками этихъ рядовъ будутъ точки пересѣченія двухъ сѣкущихъ съ двумя параллельными имъ прямыми, проходящими чрезъ общую вершину пучка прямыхъ.

Дѣйствительно, если мы чрезъ вершину S (фиг. 15) параллелограмма проведемъ нѣсколько прямыхъ, пересѣкающихъ сторону AM въ точкахѣ B, C, D,.... и сторону AM' въ соотвѣтственныхъ точкахъ B', C', D',......., то по доказанному (n° 10).

$$MB.M'B' = MC.M'C' = MD.M'D' = \ldots\ldots\ldots$$

Можно было бы вывести еще много свойствъ гомологическихъ рядовъ точекъ и гомологическихъ пучковъ прямыхъ линій. При этомъ мы могли бы показать, что всѣ свойства гомологическихъ фигуръ могутъ быть изслѣдованы безъ помощи ангармоническихъ отношеній. Но все это не входитъ въ планъ предложенной задачи.

12. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что два гомологическіе ряда вполнѣ опредѣляются тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ. По этимъ даннымъ главныя точки опредѣляются вполнѣ. Пусть на самомъ дѣлѣ на двухъ прямыхъ даны три пары соотвѣтственныхъ точекъ; на одной A, B, C и на другой A', B', C'. Поставимъ эти прямыя въ новое положеніе подъ какимъ нибудь угломъ такъ, чтобы точки A и A' совпадали. Пусть прямыя BB' и CC' (фиг. 15), соединяющія соотвѣтствующія точки, пересѣкутся въ S. Проводимъ чрезъ S прямыя, параллельныя даннымъ прямымъ до пересѣченія съ ними въ M и M'. Найденныя точки M и M' будутъ главными, а пучокъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ S, пере-

сѣчетъ данныя прямыя въ точкахъ, которыя вмѣстѣ съ данными точками образуютъ гомологическіе ряды точекъ.

13. Обратнымъ способомъ построенія можно убѣдиться, что, кромѣ точекъ M и M′, построенныхъ указаннымъ способомъ, другихъ главныхъ точекъ не существуетъ.

14. *Примѣчаніе.* При построеніи главныхъ точекъ мы предполагали, что отрѣзки AB и BC на одной прямой не пропорціональны соотвѣтственнымъ отрѣзкамъ на другой прямой, такъ какъ только въ этомъ случаѣ прямыя BB′ и CC′ пересѣкутся.

Если же на двухъ прямыхъ имѣемъ два ряда точекъ, расположенныхъ такимъ образомъ, что соотвѣтственные отрѣзки пропорціональны, то такіе ряды назовемъ *подобными.* Этотъ случай разсмотримъ послѣ.

15. Возвратимся къ нашей задачѣ о построеніи фокуса пятисторонника. Три стороны пятисторонника пересѣкутъ двѣ другія стороны въ трехъ парахъ соотвѣтственныхъ точекъ. Построимъ для этихъ трехъ паръ точекъ главныя точки M и M′ указаннымъ выше способомъ (n° 11).

Остается теперь показать, какъ по даннымъ главнымъ точкамъ построить фокусъ.

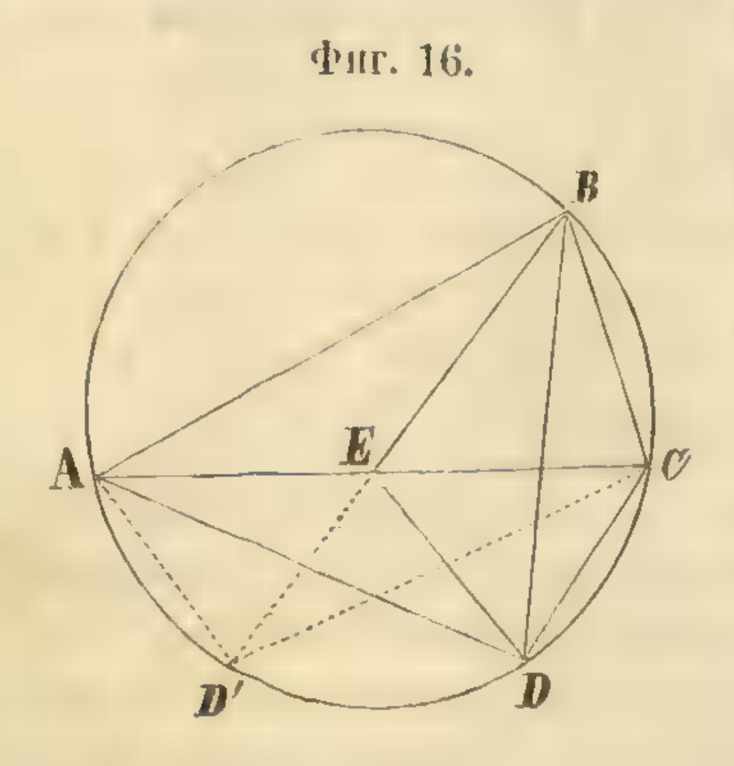
Но прежде всего докажемъ двѣ теоремы, относящіяся къ гармоническому четыреугольнику.

16. *Гармоническимъ четыреугольникомъ* называется такой четыреугольникъ, вершины котораго находятся на одной окружности, и произведеніе двухъ его противоположныхъ сторонъ равно произведенію двухъ другихъ сторонъ. Покажемъ, что гармоническій четыреугольникъ обладаетъ слѣдующими двумя свойствами.

a) діагональ гармоническаго четыреугольника дѣлитъ пополамъ уголъ между прямыми, соединяющими ея средину съ концами другой діагонали,

b) половина діагонали есть средняя пропорціональная между прямыми, соединяющими ея средину съ концами другой діагонали.

Фиг. 16.



Пусть ABCD (фиг. 16) будетъ гармоническій четыреугольникъ. По опредѣленію, вершины такого четыреугольника находятся на одной окружности и

$$AB.CD = AD.BC,$$

откуда

$$AB : AD = BC : CD. \qquad (2)$$

Раздѣлимъ діагональ AC пополамъ въ точкѣ E и соединимъ эту точку съ B и D. Требуется доказать, 1) что уголъ BED дѣлится пополамъ діагональю EC, 2) что EC есть средняя пропорціональная между EB и ED.

Продолжимъ BE до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ D′. Соединимъ D′ съ A и C. Изъ подобія треугольниковъ ABE и D′EC имѣемъ:

$$AB : CD' = AE : ED'.$$

Изъ подобія же треугольниковъ BEC и D'EA имѣемъ:

$$BC : AD' = CE : ED'.$$

Но вторыя отношенія равны, ибо по построенію $AE = CE$, слѣдовательно

$$AB : CD' = BC : AD'.$$

Изъ сравненія этой пропорціи съ (2), находимъ:

$$AD : CD' = CD : AD'.$$

Эта пропорція показываетъ, что двѣ стороны треугольника ADC пропорціональны двумъ сторонамъ треугольника AD'C; углы между этими сторонами равны, слѣдовательно треугольники подобны; но такъ какъ общая сторона AC соотвѣтствуетъ сама себѣ, то тѣ же треугольники равны. Изъ равенства послѣднихъ треугольниковъ легко заключаемъ о равенствѣ треугольниковъ AD'E и CDE. Треугольникъ EBC подобенъ треугольнику ED'A, слѣдовательно подобенъ и равному ему треугольнику EDC.

Итакъ треугольники EBC и EDC подобны. Изъ подобія заключаемъ о равенствѣ угловъ и о пропорціональности сторонъ:

$$\angle BEC = \angle CED,$$
$$EB : EC = EC : ED,$$

а это и требовалось доказать.

17. *Обратная теорема.* Положимъ, что только что доказанныя свойства удовлетворяются. Докажемъ, что въ такомъ случаѣ четыреугольникъ будетъ гармоническій.

Въ четыреугольникѣ ABCD (фиг. 16) раздѣлимъ діагональ AC пополамъ въ точкѣ E и соединимъ эту точку съ B и D. Положимъ, что EC дѣлитъ пополамъ уголъ BED и сверхъ того EC есть средняя пропорціональная между EB и ED. Требуется доказать, что вершины четыреугольника находятся на одной окружности, и произведеніе двухъ противоположныхъ сторонъ равно произведенію двухъ другихъ сторонъ.

На продолженіи BE отложимъ $ED' = ED$; соединимъ D' съ A и C. Треугольники ECD и EAD' равны, такъ какъ $EC = EA$, $ED = ED'$ и углы между этими сторонами равны, $\angle CED = \angle AED'$, ибо первый уголъ по условію, а второй по построенію равенъ углу BEC. Но треугольникъ BEC подобенъ треугольнику CED; слѣдовательно треугольникъ BEC подобенъ треугольнику AED'. Изъ подобія этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что углы CBD' и CAD' равны, а отсюда заключаемъ, что окружность, проходящая чрезъ три точки A, D' и C, пройдетъ чрезъ точку B. Далѣе изъ равенства треугольниковъ AED' и CED, легко заключить о равенствѣ треугольниковъ AD'C и ADC, а отсюда о равенствѣ угловъ въ этихъ послѣднихъ треугольникахъ при D и D'. Но въ такомъ случаѣ та же окружность, проходящая чрезъ три точки A, D' и C, пройдетъ и чрезъ точку D.

Итакъ вершины четыреугольника находятся на одной окружности. Остается доказать второе свойство.

Изъ подобія треугольниковъ BEC и CED слѣдуетъ:

$$BC : CD = BE : EC.$$

Точно также изъ подобія треугольниковъ ABE и ADE, имѣемъ:

$$AB : AD = BE : AE.$$

Но вторыя отношенія равны, такъ какъ $AE = CE$, слѣдовательно

$$AB : AD = BC : CD,$$

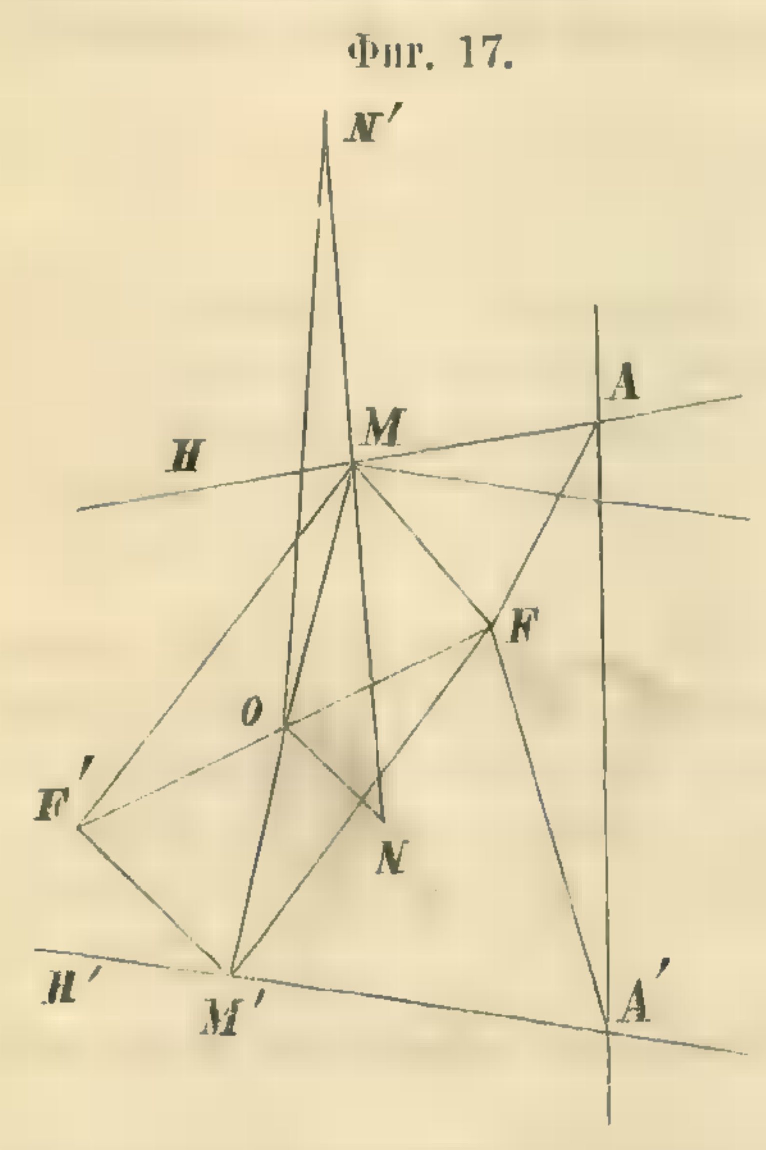
откуда

$$AB.CD = AD.BC,$$

что и требовалось доказать.

18. Перейдемъ теперь къ построенію фокуса по даннымъ главнымъ точкамъ двухъ сторонъ.

Фиг. 17.



По даннымъ выше правиламъ (n° 12) построимъ на сторонахъ HA и H'A' главныя точки M и M'.

Пусть AA' (фиг. 17) какая нибудь изъ остальныхъ сторонъ. Проведемъ MA_1 параллельно M'A'. На внѣшнемъ биссекторѣ угла AMA_1 отложимъ по обѣимъ сторонамъ отрѣзокъ $MN = MN'$ такъ, чтобы онъ былъ среднею пропорціональною между MA и M'A',

$$MN^2 = MA.M'A'.$$

Раздѣлимъ MM' пополамъ въ O и соединимъ эту точку съ N и N'. По обѣимъ сторонамъ биссектора угла NON' отложимъ отрѣзокъ $OF = OF'$ такъ, чтобы онъ былъ среднею пропорціональною между ON и ON'. Прямыя FF' и NN' (n° 17) будутъ діагоналями гармоническаго четыреугольника. Но въ такомъ случаѣ (n° 16) MN раздѣлитъ пополамъ уголъ FMF' и будетъ среднею пропорціональною между MF и MF',

$$MN^2 = MF.MF'.$$

Сравнивъ это равенство съ предыдущимъ и замѣтивъ, что $MF' = M'F$, найдемъ

$$MA.M'A' = MF.M'F. \qquad (3)$$

Сверхъ того изъ построенія и свойствъ гармоническаго четыреугольника слѣдуетъ равенство угловъ:

$$\angle AMF = \angle FM'A'. \qquad (4)$$

Точки F и F' — какъ будетъ показано ниже — представляютъ фокусы многосторонника.

П. Свѣшниковъ и С. Кричевскій.

(Окончаніе слѣдуетъ).

Отчеты о засѣданіяхъ ученыхъ обществъ.

Засѣданія математическаго отдѣла Учебно-Воспитательнаго Комитета Педагогическаго Музея въ С.-Петербургѣ. 18$^{90}/_{91}$ учебнаго года. 3 января 1891 г.

Р. И. Бѣлышева и *П. К. Соколовъ* представили разборъ учебниковъ ариѳметики Кунцевича.

В. П. Стрекаловъ разобралъ вновь вышедшій учебникъ алгебры М. Д. Дмитріева „Первыя страницы алгебры".

С. И. Шохоръ-Троцкій ознакомилъ съ содержаніемъ недавно появившагося замѣчательнаго сочиненія по планиметріи „Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Dr. Heinrich Schotten.

Секретарь математическаго отдѣла *П. Литвинскій*.

Засѣданіе Мат. Отд. Новор. Общ. Естеств. по вопросамъ элементарной математики и физики 18 января 1891 года.

А. Г. Геричъ прочелъ сообщеніе объ опредѣленіи ускоренія силы тяжести въ Одессѣ. Ближайшій къ Одессѣ пунктъ, въ которомъ опредѣлялось ускореніе,— Кишиневъ. Тамъ экспедиція Савича и Ленца въ 1868 году производила измѣренія съ помощью оборотнаго маятника и получила для длины секунднаго маятника число 99,372 цм. Желая опредѣлить такимъ же способомъ ускореніе въ Одессѣ, референтъ пользовался маятникомъ, представляющимъ копію маятника Берлинскаго Физическаго Института. Въ результатѣ получилось для длины секунднаго маятника число 99,37 цм. и отсюда для ускоренія 980,74 цм.—Сообщеніе это сопровождалось демонстраціей приборовъ и способа наблюденій.

Д. И. Зейлигеръ сообщилъ нѣсколько простыхъ доказательствъ слѣдующаго интереснаго предложенія, относящагося къ области элементарной геометріи: если въ треугольникѣ двѣ равнодѣлящихъ угловъ равны между собою, то треугольникъ— равнобедренный. Затѣмъ референтъ сообщилъ новое рѣшеніе задачи: изъ данныхъ четырехъ прямыхъ составить четыреугольникъ, около котораго можно было бы описать кругъ.

И. Слешинскій (Одесса).

Засѣданіе Матем. Отд. Новор. Общ. Естеств. по вопросамъ элементарной математики и физики. 15 февраля 1891 г.

П. И. Злотчанскій сдѣлалъ сообщеніе „объ аксіомахъ геометріи", въ которомъ подробно разсмотрѣлъ всѣ аксіомы и постуляты, содержащіеся въ „элементахъ" Евклида и постуляты Архимеда о длинѣ линій и величинѣ поверхностей. При этомъ референтъ приводилъ взгляды на этотъ предметъ Дюгамеля, Ващенко-Захарченко, Острогорскаго и др. Въ сообщеніи были затронуты существеннѣйшіе вопросы, касающіеся какъ геометрическихъ, такъ и ариѳметическихъ понятій. Въ оживленныхъ преніяхъ по поводу сообщенія были выясняемы съ различныхъ точекъ зрѣнія общія понятія объ аксіомѣ, постулятѣ и опредѣленіи. Разсматривались различныя опредѣленія прямой линіи. Но главнымъ образомъ пренія касались вопроса объ опредѣленіи понятія длины кривой и входящей сюда истины, что конечная постоянно возрастающая перемѣнная имѣетъ предѣлъ.

И. Слешинскій (Одесса).

ЗАДАЧИ.

№ 165. Данный квадратъ разрѣзать на возможно малое число частей, переложеніемъ которыхъ образовался бы прямоугольникъ, имѣющій длину втрое больше ширины. (Заимств.) *Ш.*

№ 166. Къ тремъ даннымъ на одной прямой точкамъ найти четвертую гармоническую при помощи только линейки.

(Заимств.) *Ш.*

NB. Четыре точки A, B, C, D, лежащія на одной прямой, называютя *гармоническими* въ томъ случаѣ, когда

$$AD.BC=AB.CD,$$

т. е. когда отрѣзокъ AC дѣлится внутренне точкою B, а внѣшне точкою D въ одномъ и томъ-же отношеніи.

№ 167. Показать, что, принимая радіусъ круга за единицу, зависимость между стороною a_n прав. впис. въ кругъ многоугольника и стороною a_{3n} прав. впис. въ тотъ же кругъ многоугольника тройного числа сторонъ выражается уравненіемъ

$$a^3_{3n}-3a_{3n}+a_n=0.$$

Студ. Спб. унив. *К-ъ.*

№ 168. Двѣ окружности радіусовъ r и $R=2r$ находятся во внѣшнемъ соприкосновеніи; къ нимъ проведены двѣ касательныя окружности, центры которыхъ O и O' лежатъ на перпендикулярахъ, возставленныхъ въ центрахъ данныхъ окружностей къ линіи ихъ центровъ. Опредѣлить радіусы касательныхъ окружностей. *Н. Николаевъ* (Пенза).

№ 169. Основаніемъ тетраэдра служитъ треугольникъ ABC, стороны котораго $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$. Ребра тетраэдра $AS=BC=a$, $CS=AB=c$ и $BS=AC=b$. Опредѣлить объемъ тетраэдра.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 170. Даны точки A, B и C. Черезъ точку A провесть между B и C прямую такъ, чтобы разность квадратовъ разстояній этой прямой отъ точекъ B и C была равна квадрату данной прямой k.

И. Александровъ (Тамбовъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 312. Въ треугольникѣ ABC вписана окружность O, которая касается сторонъ BC, CA, AB соотвѣтственно въ точкахъ D, E, F. Изъ точки B проведенъ перпендикуляръ на прямую AO, изъ A перпендикуляръ на BO. Доказать, что основанія этихъ перпендикуляровъ лежатъ на хордѣ DE (или ея продолженіи).

Положимъ, что биссекторы AO и BO пересѣкутся съ прямой DE въ точкахъ M и N:

$$\angle AON = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2},$$

$$\angle AEN = 90^\circ + \frac{C}{2}$$

Слѣдовательно

$$\angle AON + \angle AEN = 180^\circ$$

и потому около четыреугольника AONE можно описать окружность. Проведя діагонали AN и OE, находимъ, что

$$\angle ANO = \angle AEO,$$

но

$$\angle AEO = 90^\circ,$$

слѣдовательно и

$$\angle ANO = 90^\circ,$$

т. е. $AN \perp BO$. Точно такъ-же можно доказать, что $BM \perp AO$.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва). Ученики: Тифл. р. уч. (7) *Н. П.*, Оренб. г. (8) *А. П.*

№ 419. Доказать теорему: если изъ произвольной точки окружности опустимъ перпендикуляры на стороны вписаннаго въ нее многоугольника четнаго числа сторонъ, то произведеніе перпендикуляровъ четнаго порядка равно произведенію перпендикуляровъ нечетнаго порядка.

Такъ какъ теорема эта доказана для четыреугольника *), то остается показать, что если она справедлива для $2n$-угольника, то она имѣетъ мѣсто и для многоугольника о $2n+2$ сторонахъ.

Впишемъ въ кругъ многоугольникъ ABCDE......PQA о $2n+2$ сторонахъ; діагональю AD этотъ многоугольникъ разобьется на $2n$-угольникъ ADE......PQA и четыреугольникъ ABCD; обозначимъ перпендикуляры, опущенные изъ точки на окружности S на стороны AB, BC, CD.... PQ, QA черезъ $h_1, h_2, h_3 ....., h_{2n+1}, h_{2n+2}$ и на діагональ AD чрезъ h, тогда по предположенію для $2n$-угольника ADE.....PQA имѣемъ

$$h.h_5.h_7.......h_{2n+1} = h_4.h_6.h_8......h_{2n+2},$$

а для четыреугольника ABCD—по доказанному

$$h_1.h_3 = h_2.h,$$

*) См. „Вѣстникъ“ V с. стр. 142; рѣш. зад. № 246.

перемножая два послѣднія равенства, получаемъ

$$h_1.h_3.h_5.\ldots\ldots.h_{n2+1}=h_2.h_4.h_6.\ldots\ldots h_{2n+2},$$

что и требовалось показать.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *В. Эльпидинъ* и *С. Блажко* (Москва), *Я. Эйлеръ* (Спб.). Ученикъ Курск. г. (8) *В. Г.*

№ 436. Доказать, что кругъ, проходящій чрезъ концы одной діагонали и чрезъ центръ круга, описаннаго около гармоническаго четыреугольника, дѣлимъ другую діагональ пополамъ.

Положимъ, что данъ гармоническій четыреугольникъ ABCD, вписанный въ кругъ O. Пусть E есть средина діагонали BD. Продолжаемъ AE до пересѣченія съ окружоостью круга O въ точкѣ C'. Тогда $\smile BC'=\smile DC$. Уголъ AED измѣряется дугою$=\frac{\smile AD+\smile BC'}{2}$ или $\frac{\smile AD+\smile DC}{2}=\frac{\smile AC}{2}$. Уголъ AEC измѣряется дугою AC, такъ какъ онъ вдвое больше угла AED. Соединивъ концы діагонали AC съ центромъ O описаннаго круга, находимъ, что $\angle AOC$ также измѣряется дугою AC, и потому $\angle AOC=\angle AEC$, откуда заключаемъ, что концы діагонали AC, центръ круга описаннаго O и средина E другой діагонали расположены на одной окружности.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Блажко* (Москва). Ученикъ 1-ой Спб. г. (7) *А. К.*

№ 482. Въ кругъ вписанъ произвольный треугольникъ ABC. Средины дугъ BC, CA. AB соединимъ прямыми и получимъ второй вписанный треугольникъ $A_1B_1C_1$ отличный отъ перваго. Соединивъ средины дугъ B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, получимъ третій вписанный треугольникъ $A_2B_2C_2$ и т. д. Какой треугольникъ и почему получится въ предѣлѣ, если будемъ продолжать такое построеніе неопредѣленное число разъ?

Уголъ A_1 измѣряется дугой $\frac{\smile AB+\smile AC}{4}$ и потому равенъ $\frac{\angle B+\angle C}{2}$ или $90^\circ-\frac{\angle A}{2}$. Точно также убѣждаемся, что

$$\angle A_2=90^\circ-\frac{\angle A_1}{2},\quad \angle A_3=90^\circ-\frac{\angle A_2}{2}\ldots\ldots\ldots\angle A_n=90^\circ-\frac{\angle A_{n-1}}{1}.$$

Отсюда находимъ послѣдовательно

$$\angle A_2=90^\circ(1-{}^1/_2)+\frac{\angle A}{4},\quad \angle A_3=90^\circ(1-{}^1/_2+{}^1/_4)-\frac{\angle A}{8}\ldots\ldots$$

и наконецъ

$$\angle A_n=90^\circ\left(1-{}^1/_2+{}^1/_4-\ldots\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right)+(-1)^n.\frac{\angle A}{2^n}.$$

Въ предѣлѣ при $n=\infty$ имѣемъ

$$\angle A_n = 90^\circ . \frac{1}{1+{}^1/_2} = 60^\circ .$$

Подобнымъ образомъ найдемъ, что и углы В и С въ предѣлѣ стремятся къ 60°, а слѣдовательно $\triangle A_n B_n C_n$ въ предѣлѣ дѣлается равностороннимъ.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *Я. Блюмбергъ* (Ревель), *И. Соляниковъ* (Полтава). Ученики: Курск. г. (7) *В. Х.*, Симб. г. (8) *А. Е.*, Киш. р. уч. (7) *А. З.*, Тверск. р. уч. (7) *М. Н.*

№ 539. Опредѣлить радіусъ шара, описаннаго около правильной треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равняется a и каждая сторона основанія равна b.

Проводимъ высоту пирамиды РВ (Р—вершина); соединяемъ центръ О описаннаго шара съ какой нибудь вершиной основанія А.

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ АВР и АОВ будемъ имѣть:

$$AB^2 = AP^2 - BP^2$$
$$AB^2 = AO^2 - BO^2,$$

откуда

$$AP^2 - BP^2 = AO^2 - BO^2,$$

или

$$a^2 - (r+x)^2 = r^2 - x^2$$

и

$$x = \frac{a^2 - 2r^2}{2r}.$$

Подставляя это значеніе x во второе уравненіе, получимъ:

$$\frac{b^2}{3} = r^2 - \left(\frac{a^2 - 3r^2}{2r}\right)^2,$$

откуда

$$r = \frac{3a^2}{2\sqrt{3(3a^2 - b^2)}}.$$

Н. Николаевъ (Пенза), *И. Пастуховъ* (Пермь), *А. Шульженко* (Кіевъ). Ученики: Кіев. р. уч. (7) *Л. А.*, Тверск. р. уч. (7) *М. Н.* и Ворон. к. к. (7) *Н. В.*

Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Кіевъ, 28 Февраля 1891 г.
Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.